数理解析研究所講究録
911 巻 1995 年 62-74

Picard 原理と Picard 次元

大同工業大学数学教室　今井英夫　(Hideo Imai)

1. Picard 次元と Picard 原理

m 次元ユークリッド空間を R^m とし, $0 < s \leq 1$ なる各 s に対して $U_s = \{0 < |x| < s\}$ と置く. U_s は $R^m \backslash \{0\}$ における理想境界成分 $x = 0$ の理想境界近傍とみなせる。このとき $\Gamma_s : |x| = s$ は U_s の相対境界であり, U_s の $R^m \backslash \{0\}$ における相対閉包 $\overline{U}_s$ は $U_s \cup \Gamma_s$ である。特に $U_1 = U, \Gamma_1 = \Gamma$ と置くことにする。$\overline{U}_s$ で定義された局所 Hölder 連続函数 $P(x)$ を U_s における**密度**という。U_s における密度 $P(x)$ をポテンシャルにもつ定常 Schrödinger 方程式

$$L_P u(x) \equiv (-\Delta + P(x))u(x) = 0 \tag{1}$$

を考える. U_s における (1) の解 u を U_s における $P-$調和函数といい、U_s における $P-$調和函数の族を $P(U_s)$ とする。U_s の任意の点 y を固定して, $G_s(x,y)$ は $L_P G_s(x,y) = \delta_y(x)$ をみたす U_s における正値 $P-$優調和函数で、その最大 $P-$調和劣函数は 0 のとき、$G_s(x,y)$ を U_s における (y に極をもつ) $P-$**Green 函数**という。ここに $\delta_y(\cdot)$ は点 y における Dirac 測度とする。

U_s における非負値 $P-$調和函数の族を $PP(U_s)$ とする. $PP(U_s) = \{0\}$ のとき、密度 P は U_s において**楕円型**であるという。$PP(U_s) \neq \{0\}$ かつ U_s における $P-$Green 函数が存在しないとき、密度 P は U_s において**放物型**であるという。$PP(U_s) \neq \{0\}$ かつ U_s における $P-$Green 函数が存在するとき、密度 P は U_s において、**双曲型**であるという (M. Murata[13], E. Pinchover[25]) 。

Γ_s において境界値 0 をとる $PP(U_s)$ の部分族を $PP(U_s : \Gamma_s)$ とする。Γ_s の面積要素を dS_x, Γ_s の面積を $s(\Gamma_s)$, Γ_s における外法線方向微分を $\partial/\partial n$ として,

$$l(u) \equiv -\frac{1}{s(\Gamma_s)} \int_{\Gamma_s} \frac{\partial}{\partial n} u(x) dS_x$$

とおく。$PP_1(U_s : \Gamma_s) \equiv \{u \in PP(U_s : \Gamma_s); l(u) = 1\}$ はコンパクトな凸集合であるから $PP_1(U_s : \Gamma_s)$ の端点の集合を $ex.PP_1(U_s : \Gamma_s)$ とする。U_sにおける密度 Pの原点 $x = 0$ における **Picard 次元**を集合 $ex.PP_1(U_s : \Gamma_s)$ の濃度$\#(ex.PP_1(U_s : \Gamma_s))$ として, $\dim(U_s, P)$ と記す (M. Nakai[18]) 。即ち

$$\dim(U_s, P) = \#(ex.PP_1(U_s : \Gamma_s)).$$

特に

$$\dim(U_s, P) = 1$$

のとき、U_s上の密度 Pに対して原点 $x = 0$ において **Picard 原理**が成立するという (M. Nakai[18]) 。

Schrödinger 方程式における Picard 原理の名称は M. Brelot が 1931 年 [3] において M. Bouligand の 1926 年の論文を引用したことに始まる。そこにおいて E. Picard が 1923 年 $P = 0$ のとき、$\dim(U, 0) = 1$ を示した事実を Picard 原理と呼んでいる。しかし 1903 年 M. Bôcher により示されていた (L. Helms[5] 参照) 。

2. Picard 次元と P-Martin 理想境界

(U_s, P) が双曲型と仮定し、$G_s(x, y)$ を yに極をもつ U_s における $P-$Green 函数とする。Γ_sで境界値 1 、理想境界 $x = 0$ で" 境界値 0" をとる U_sにおける $P-$調和函数 $(D_s1)(x)$ を (1) の U_sにおける $P-$**単位**といい、$e_P^s(x)$ と記す。即ち $(D_s1)(x)$ は、$0 < t < s$ なる任意の t に対して、Γ_sで 1 、Γ_tで 0 を境界値にもつ $U_s \backslash \overline{U}_t$における $P-$調和函数を $(D_{t,s}1)(x)$ とするとき、$(D_s1)(x) = \lim_{t \downarrow 0}(D_{t,s}1)(x)$ で与えられる。

$$K_s(x, y) = \frac{G_s(x, y)}{e_P^s(y)}$$

を P−Martin 核という。$\overline{U}_s$上の函数 $K_s(x,\cdot)$ が連続に拡張される$\overline{U}_s$の最小のコンパクト化を$\overline{U}_s$の P−**Martin コンパクト化**といい、$(\overline{U}_s)^*_P$と記す。$(\overline{U}_s)^*_P\backslash\overline{U}_s$を P−Martin 境界といい、βで記す。このとき $\{K_s(\cdot,\xi^*):\xi^*\in\beta\}\subset PP_1(U_s:\Gamma_s)$ である。

$$\beta_1=\{\xi^*\in\beta:K_s(\cdot,\xi^*)\in ex.PP_1(U_s:\Gamma_s)\}$$

を**極小** P−**Martin 境界**という。$\#\beta_1$で集合β_1の濃度を表す。

定理 A([18]). (U_s,P) が双曲型のとき、$ex.PP_1(U_s:\Gamma_s)=\{K_s(\cdot,\xi^*):\xi^*\in\beta_1\}$ 。特に $\dim(U_s,P)=\#\beta_1$ である。

従って (U_s,P) が双曲型のとき、密度 Pに対して原点 $x=0$ において Picard 原理が成立するとは原点 $x=0$ における P−Martin 極小境界が 1 点よりなることを意味し、また$\overline{U}_s$の P−Martin コンパクト化 $(\overline{U}_s)^*_P$ は U_sのユークリッドの位相による閉包$\overline{U}_s\cup\{0\}$ と同相であることを意味する。$P=0$ のとき $(\overline{U}_s)^*_0$と$\overline{U}_s\cup\{0\}$ は同相である (例えば [5] 参照) 。密度 Pの変化と共に P−Martin コンパクト化とユークリッドの位相の関係がどのように変化するかその関係を知りたい。最も単純な場合として 1 点の近傍で定義された密度 Pの特異な挙動と共に P−Martin 境界がどの様に変わるか詳細に調べることが原点における Picard 原理の研究の動機になっていた。

なお U_sの P−Martin コンパクト化 $(U_s)^*_P$を考えるとき、Γ_sは十分滑らかであり $P(x)$ は相対境界Γ_s上まで定義されている。このときΓ_sの Martin 境界は極小境界ばかりよりなりΓ_sと同相である (S. Ito[10], M. Murata[14]) 。

Picard 原理が成立する為の十分条件は幾つか得られているがその一つとして次の結果をあげておく。

定理 1([11],[6],[26]). $P(x)$ は U_sにおいて双曲型であるとする。更に $P(x)=O(|x|^{-2})(x\to 0)$ のとき、$\dim(U_s,P)=1$ である。

この定理は U_s上 $P(x)\geq 0$ のとき M. Kawamura[11] において、$Lu(x)=\{-\Delta+\sum_{i=1}^m b_i(x)(\partial/\partial x_i)+P(x)\}u(x)=0$ が U_sで双曲的かつ $|x|(\sum|b_i(x)|)+|x|^2(\sum|(\partial/\partial x_i)b_i(x)|$

$+|P(x)|)$ が有界なとき [6] において、更に $Lu(x)$ のΔの部分を一様楕円型かつ条件 $|x|^2(\sum|(\partial/\partial x_i)b_i(x)|)$ の有界性は不要として E. Pinchover[26] において示された。

詳しくは $0 < a_{n+1} < b_n < a_n < 1$ 、$\inf(b_n/a_n) > 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたす任意の数列 $\{a_n\}$ 、$\{b_n\}$ に対して、

$$A_n \equiv \{b_n \leq |x| \leq a_n\} \text{、} A \equiv \cup_{n=1}^{\infty} A_n$$

とする。A 上 $P(x) = O(|x|^{-2})(x \to 0)$ をみたすならば、定理 1 は成立する。

3. 回転不変密度の Picard 次元

$Q(x)$ が $|x|$ のみで定まる函数のとき $Q(x)$ を**回転不変**であるという。$\overline{U}$における回転不変な函数 $Q(x)$ をポテンシャルにもつ Schrödinger 方程式を

$$L_Q u(x) \equiv (-\Delta + Q(x))u(x) = 0 \tag{2}$$

とする。(2) の Uにおける $Q-$単位を $e_Q(x)$ 、$(-\Delta + Q(x) + (m-1)/|x|^2)u(x) = 0$ の U における $(Q + (m-1)/|x|^2)-$単位を $e_{Q,1}(x)$ とするとき、

$$\alpha(Q) \equiv \lim_{x\downarrow 0} \frac{e_{Q,1}(x)}{e_Q(x)}$$

が存在して、$\alpha(Q) = 0$ または $0 < \alpha(Q) < 1$ のいずれかである (M. Nakai[15]) 。$\alpha(Q)$ を Q の**特異指数**という。

定理 B([15],[13],[23]). $Q(x)$ が回転不変密度のとき、

$$(U)_Q^* = \{\alpha(Q) \leq |x| \leq 1\}$$

かつ $(U)_Q^* \backslash U$の各点は極小境界点である。

定理 B より (U,Q) が双曲型のとき、Picard 次元 $\dim(U,Q)$ は 1 または連続体の濃度 $\boldsymbol{c}$ のいずれかである。(U,Q) が楕円型のとき、$\dim(U,Q) = 0$ であり、(U,Q) が放物型のと

きは $\dim(U,Q)=1$([13],[25]) であるから、次の回転不変密度の値域定理を得る。

定理 C. $Q(x)$ が回転不変密度のとき、Picard 次元 $\dim(U,Q)$ は $0,1$ または連続体の濃度 $\boldsymbol{c}$ のいずれかに限る。

$Q(x)$ が$\overline{U}$において (m 次元ルベーク測度 $d\lambda$について) 絶対連続かつ非負値局所ヘルダー連続のとき、従って (2) の解が C^2級のとき、上記定理 B は M. Nakai[15] において示された。また $Q(x)$ が$\overline{U}$において絶対連続かつ $Q(x)\in L^p_{loc}(\overline{U})$ $(p>m/2)$ で (2) の解が連続な弱解のとき、M. Murata[13] において、更に $Q(x)dx$ が$\overline{U}$におけるラドン測度で、即ち $Q(x)$ に関する正則性の条件が一切仮定しないで、(2) の解が連続な弱解のとき、M. Nakai-T. Tada[23] において示された。

定理 C は定理 B を径由せずに、$Q-$調和函数が $L_2(\Gamma)$ において球面調和函数により絶対かつ一様収束する Fourier に展開できることを示しこの事実と m 次直交変換群の性質を用いて直接導いている (M. Nakai-T. Tada[22], [24]) 。

$\overline{U}$における函数 Pがすべての $x\in U$に対して

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\Big(\sup_{y\in B(x,\epsilon)}\int_{B(x,\epsilon)}N(y,z)|P(z)|dz\Big)=0$$

をみたすとき、Pを Uにおける **Kato 族**の函数であるという。ここに $B(x,\epsilon)$ は点 x 中心半径 ϵの球であり、$N(y,z)$ はニュートン核即ち $|y-z|^{2-m}(m\geq 3)$ 又は対数核 $\log|y-z|^{-1}(m=2)$ である。Uにおける Kato 族の可測函数 $P(x)$ をポテンシャルにもつ Schrödinger 方程式 (1) に対して、局所ヘルダー連続な密度$\tilde{P}(x)$ をポテンシャルにもつ Schrödinger 方程式 $(-\Delta+\tilde{P})u(x)=0$ で $(U)^*_P\approx(U)^*_{\tilde{P}}$(同相) となる$\tilde{P}$が Pより構成できる (M. Nakai[19]) 。上記回転不変な函数 $Q(x)$ はいずれも Uにおける Kato 族の函数である。反例を作ったりする場合、$(U)^*_P$が前もって与えられた性質をもつポテンシャル Pを作りたい。ポテンシャルを折り曲げたり、つないだりする上で不連続なポテンシャルが扱い易く、そのようなポテンシャル P で与えられた性質を持つ $(U)^*_P$を作っても、局所ヘルダー連続な密度$\tilde{P}$で $(U)^*_P\approx(U)^*_{\tilde{P}}$となる$\tilde{P}$ が得られる。従ってここでは局所ヘルダー連続な密度をポテンシャルにもつ Schrödinger 方程式を考えれば十分である。なお一般に $P(x)$ が Kato 族のラド

ン測度のとき、(2) の解は必ずしも連続とはかぎらぬ (M. Nakai[20]) 。また Kato 族のラドン測度 $P(x)$ をポテンシャルにもつ (1) の連続な弱解よりなる層は Brelot 調和空間をなす ([1],[2]) から Brelot 調和空間の一般論が利用できる。

4. Picard 次元の単調性と斉次性.

U における非負値回転不変密度に関して、M.Nakai[17] 及び M. Kawamura-M. Nakai[12] においてそれぞれ次の **Picard 原理及び Picard 次元の単調性、斉次性**が示されている。

定理 D(単調性 [17]). U における非負値回転不変密度 P, Q が U において $P \leq Q$ のとき、

$$\dim(U, P) \leq \dim(U, Q).$$

定理 E(斉次性 [12]). Pを U における任意の非負値回転不変密度とするとき、任意の定数 $c > 0$ に対して

$$\dim(U, cP) = \dim(U, P).$$

さらに M. Nakai[16] において **Uにおける任意の非負値密度について、Picard 次元及び Picard 原理の単調性、斉次性が成立するかどうか**問われている。

非負値密度に関する単調性: M. Nakai-T. Tada[21], T. Tada[27](定理 H) 等により否定的に解決された。

非負値密度に関する斉次性: 未解決。

以下非負値とはかぎらぬ回転不変密度について考える。

先ず負値回転不変密度に関して Picard 原理の斉次性が成立するかどうか考える.

$$R(x) \equiv -\frac{1}{4|x|^2}\{(m-2)^2 + \frac{1}{(\log\frac{1}{|x|})^2}\} \tag{3}$$

とする.

定理 2([8]). (3) で与えられた密度 Rは, $0 < s < 1$ なる任意の s 及び $1 < c$ なる任意の c に対して,

$$\dim(U_s, R) = 1, \qquad \dim(U_s, cR) = 0$$

をみたす.

従って負値回転不変密度に関しては Picard 原理の斉次性は成立しない.

5. Picard 次元の斉次不等式.

Uにおける任意の一般符号密度 Pに対して、区間 $(0,t)$ の任意の s に対して $\dim(U_s, P) = \dim(U_t, P)$ となる t が $(0,1]$ に存在する (M. Nakai[18], M. Nakai-T. Tada[22]). このとき原点 $x = 0$ における密度 $P(x)$ の **Picard 次元**を $\dim P$と記し

$$\dim P = \lim_{s \downarrow 0} \dim(U_s, P)$$

と定義する ([22]). 特に

$$\dim P = 1$$

のとき、密度 Pに対して原点 $x = 0$ において **Picard 原理**が成立するという。

一般符号回転不変密度について M. Nakai-T. Tada[22] は次の事実を得ている。

定理 F(単調性). Uにおける任意の一般符号回転不変密度 P, Q が Uにおいて $P \leq Q$ のとき、$\dim P \leq \dim Q$ である.

定理 G(斉次不等式). Pを Uにおける任意の一般符号回転不変密度とするとき、$0 < c \leq 1$

なる任意の定数 c に対して

$$\dim P \leq \dim cP,$$

また同値な表現として、$1 \leq c$ なる任意の c に対して

$$\dim cP \leq \dim P$$

が成立する。

定理 F と定理 G より非負値回転不変密度 Pに関する斉次等式が得られるから定理 G は非負値回転不変密度に関する斉次性定理 (定理 E) の一般化であるが、下記の様に等号の成立しない例が作れるから最良の一般化とみなせる。

また定理 G により一般符号回転不変密度の部分族 $\mathbf{S}$ に対して斉次性が成立するとは

(4) $$\dim P = \dim cP \ \ (0 < c \leq 1 \text{ なる任意の } c \text{ に対して})$$

が $\mathbf{S}$ の各密度 Pに対して成立することでよいことになる。

(3) で与えられた密度 Rは $c > 1$ なる任意の c について

$$0 = \dim cR < \dim R = 1$$

をみたしている。この例は $1 > c > 0$ なる任意の c を固定するごとに $0 = \dim P < \dim cP = 1$ となる Uにおける負値回転不変密度 Pの存在を示している。

さらに $1 > c > 0$ なる任意の c に対して $0 = \dim P < \dim cP = 1$ となる Uにおける回転不変密度 Pが存在するかどうか問うている。また $1 > c > 0$ なる任意の c に対して $1 = \dim P < \dim cP$ なる回転不変密度 P、および $c > 1$ なる任意の c に対して $1 = \dim cP < \dim P$なる回転不変密度 Pが存在するかどうかも問うている ([22]) 。

$\eta > e^e$ なる任意の定数ηをとり,

(5) $$S(x) \equiv -\frac{1}{4|x|^2}\{(m-2)^2 + \frac{1}{(\log\frac{\eta}{|x|})^2} + \frac{2}{(\log\frac{\eta}{|x|}\log\log\frac{\eta}{|x|})^2}\}$$

とする.

定理 3([9]). (5) で与えられる負値回転不変密度 S は $1 > c > 0$ なる任意の c について

$$0 = \dim S < \dim cS = 1$$

をみたす.

$Q(x)$ が $\overline{U}$ における回転不変 Radon 測度のとき、$Q = Q^{+} - Q^{-}$ を Q の Jordan 分解とする。$(U, -Q^{-})$ が双曲型のとき、密度 Q は**強正型**であるということにする。**U における強正型回転不変 Radon 測度に対しては斉次等式 (4) の成立する**ことが最近 M. Nakai-T. Tada[24] により示された。

なお固有値問題の見地からも原点の近傍における正値解の存在、非存在が Y. Furusho[4] 等で調べられている。しかしこの観点からの研究においては正値解の次元、即ち原点における極小 Martin 境界の濃度までは問題とされていないようである。

以上 (3) または (5) の密度をみると、また他の諸例からの感触として密度 P が原点の近傍で特異な挙動をすればするほど Picard 次元 $\dim P$ は変化しやすいような印象をもつが、必ずしもそうともいいきれない例として次の定理を述べておく。

$m = 2$ として

$$V(z) = \frac{5}{4|z|^2}(\log\frac{1}{|z|})^2 + \frac{3}{2|z|^2}, \quad W(z) = \frac{1}{|z|^2}(\log\frac{1}{|z|})^2(\frac{1}{4} + \cos^2\theta) + \frac{1}{|z|^2}(\frac{1}{2} + \sin^2\theta)$$

とする。このとき

定理 H([27]). $\dim V = 1$ であるが $\dim W \geq 2$ 。

従って非負値密度に関して Picard 原理 (又は Picard 次元) の単調性は成立しない。

6. 補足.

定理 2,3 の証明において必要な定義及び事実を述べておく.

$0 < t_1 \leq t_2 < s$ をみたす任意の t_1, t_2をとる。$PP(U_s)\backslash\{0\}$ の元 h に対して、Γ_{t_1}で境界値 h 、理想境界 $x = 0$ で"境界値 0"をとる U_{t_1} における $P-$調和函数を $D_{t_1}h$ とする。Γ_{t_2}で境界値 h 、Γ_sで境界値 0 をとる $U_s\backslash\overline{U}_{t_2}$ における $P-$調和函数を $D_{t_2,s}h$ とする。

定理 4([25],[7]). Pが U_sにおいて放物型である為の必要十分条件は $0 < t_1 \leq t_2 < s$ をみたす任意の t_1, t_2及び $PP(U_s)\backslash\{0\}$ の任意の元 h に対して

$$D_{t_1}h = h, \quad D_{t_2,s}h = h$$

が U_{t_1}及び $U_s\backslash\overline{U}_{t_2}$においてそれぞれ成立することである。

$$\tilde{p}(x) = |x|^{-\frac{(m-2)}{2}}(\log\frac{1}{|x|})^{\frac{1}{2}}$$

とするとき、任意の $s \in (0,1)$ に対して$\tilde{p}$は U_sにおける正値 $R-$調和函数でΓ_s上$\tilde{p} > 0$ である。従って $0 < t < s$ なる任意の t に対して $U_s\backslash\overline{U}_t$上$\tilde{p} \neq D_{t,s}\tilde{p}$である。定理 1, 4 より、

補題 1. $\dim R = 1$.

$\log_2|x| = \log\log|x|$, $\log_3|x| = \log\log_2|x|$ とおき、

$$p(x) = |x|^{-\frac{(m-2)}{2}}(\log\frac{\eta}{|x|}\log_2\frac{\eta}{|x|})^{\frac{1}{2}}, \qquad q(x) = \log_3\frac{\eta}{|x|}$$

とする。(5) の密度で $|x| = r$とおき,

$$-(\frac{d^2}{dr^2}u(r) + \frac{m-1}{r}\frac{d}{dr}u(r)) + S(r)u(r) = 0 \tag{6}$$

とする. このとき

$$p(r)\sin(\frac{1}{2}q(r)), \quad p(r)\cos(\frac{1}{2}q(r))$$

は (6) の $(0,1]$ における 1 次独立な解である。従って

補題 2. 任意の $s \in (0,1]$ に対して

$$(-\Delta + S(x))u(x) = 0$$

の U_s における正値解は存在しない.

$$T(x) \equiv -\frac{1}{4|x|^2}\{(m-2)^2 + \frac{1}{(\log \frac{\eta}{|x|})^2} + \frac{1}{(\log \frac{\eta}{|x|} \log_2 \frac{\eta}{|x|})^2}\},$$

とする. $p(x)$ は U における正値 $T-$調和函数であるから、

補題 3. $0 < c < 1$ なる任意の c に対し適当な U_s において $p(x)$ は $cS-$調和ではない $cS-$優調和函数である。従って U_s における $cS-$Green 函数は存在する。

文献

[1] A. Boukricha, *Das Picard-prinzip und verwandte Fragen bei Störung von harmonischen Räumen*, Math. Ann., **239** (1979), 247-270.

[2] A. Boukricha, W. Hansen and H. Huber, *Continous solutions of the generalized Schrödinger equation and perturbation of harmonic spaces*, Expo. Math., **5**(1987), 97-135.

[3] M. Brelot, *Étude de l'équation de la chaleur $\Delta u = c(M)u(M), c(M) \geq 0$, au voisinage d'un point singulier du coefficient*, Ann. Éc. Norm., (3), **48**(1931), 153-246.

[4] Y. Furusho, *Posotive solutions of linear and quasilinear elliptic equations in unbounded domains*, Hiroshima Math. J., **15**(1985), 173-220.

[5] L. Helms, *Introduction to Potential Theory*, Wiley Interscience, 1969.

[6] H. Imai, *Picard principle for linear elliptic differential operators*, Hiroshima Math. J., **14**(1985), 527-535.

[7] H. Imai, *The parabolicity of Brelot's harmonic spaces*, J. Austral. Math. Soc., (to appear).

[8] H. Imai, *On Picard dimensions of nonpositive densities in Schrödinger equations*, Complex Variables, (to appear).

[9] H. Imai, *Nonhomogeneity of Picard dimensions for negative radial densities*, Hiroshima Math. J., (to appear).

[10] S. Ito, *Martin boundary for linear elliptic differential operators of second order in a manifold*, J. Math. Soc. Japan, **16** (1964), 307-334.

[11] M. Kawamura, *On a conjecture of Nakai on Picard principle*, J. Math. Soc. Japan, **31**(1979), 359-371.

[12] M. Kawamura and M. Nakai, *A test for Picard principle for rotation free densities, II*, J. Math. Soc. J., **14** (1976), 323-341.

[13] M. Murata, *Structure of positive solutions to* $(-\Delta + V)u = 0$ *in* R^n, Duke Math. J., **53**(1986), 869-943.

[14] M. Murata, *On construction of Martin boundaries for second order elliptic equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **26**(1990), 585-627.

[15] M. Nakai, *Martin boundary over an isolated singularity of rotation free density*, J. Math. Soc. Japan, **26**(1974), 483-507.

[16] M. Nakai, *A test for Picard principle*, Nagoya Math. J., **56**(1974), 105-119.

[17] M. Nakai, *A test for Picard principle for rotation free densities*, J. Math. Soc. Japan, **27**(1975), 412-431.

[18] M. Nakai, *Picard principle and Riemann theorem*, Tôhoku Math. J., **28**(1976), 277-292.

[19] M. Nakai, *Comparison of Martin boundaries for Schrödinger operators*, Hokkaido Math. J., **18**(1989), 245-261.

[20] M. Nakai, *Continuity of solutions of Schrödinger equations*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **110**(1991), 581-597.

[21]M. Nakai and T. Tada, *Extreme nonmonotoneity of the Picard principle*, Math. Ann. **281**(1988), 279-293.

[22] M. Nakai and T. Tada, *Monotoneity and homogeneity of Picard dimensions for signed radial densities*, NIT Sem. Rep. Math., **99**(1993), 1-51.

[23] M. Nakai and T. Tada, *Concrete representation of Green's functions and its application*, Bull. Nagoya Inst. Tech., **45** (1993), 163-196. (in Japanese).

[24] M. Nakai and T. Tada, *Picard dimensions for potentials of positive type*, Bull. Nagoya Inst. Tech., **46**(1994), (in Japanese, to appear).

[25] Y. Pinchover, *On positive solutions of second-order elliptic equations, stability results and classification*, Duke Math. J., **57**(1988), 955-980.

[26] Y. Pinchover, *On positive Liouville theorems and asymptotic behavior of solutions of Fuchsian type elliptic operators*, Preprint.

[27] T. Tada, *Nonmonotoneity of Picard principle for Schrödinger operators*, Proc. Japan Acad., **66**, Ser. A(1990), 19-21.